OMM - Bakingemova Pi teorema

March 24, 2023

Prošli čas:

- Veličine koje učestvuju u nekom fizičkom zakonu organizujemo u bezdimenzione grupe.
- Jednačine ostaju potpuno iste prilikom promena jedinica kojima se mere te veličine.
- Možemo da otkrujemo oblik zavisnosti fizičkih veličina tj. oblik fizički korektne jednačine (do na konstantu)

Danas:

- Da li procedura može da se uradi u opštem slučaju (uvek)?
- Da li može da se automatizuje procedura?

Bakingemova Π teorema

Neka su $Q_1, ..., Q_n$ fizičke veličine, $\mathcal{M}$ dimenziona matrica ovih veličina u odnosu na osnovne dimenzije $\delta_1, ..., \delta_k,\ k \geq 1$ i $p = rang(\mathcal{M})$. Tada je svaka fizički smislena jednačina

$$f(Q_1, ..., Q_n) = 0$$

ekvivalentna jednačini

$$F(\Pi_1, ..., \Pi_{n-p}) = 0$$

za neku funkciju F gde su Π_i bezdimenzione veličine koje se mogu predstaviti kao

$$\Pi_i = Q_1^{\alpha_{1i}} \cdot .... \cdot Q_n^{\alpha_{ni}},\ i = 1, ..., n-p$$

za neke brojeve $\alpha_{ji} \in \mathbb{Q}$.
Vektori $\alpha_i = (\alpha_{1i}, ..., \alpha_{ni})^T, i = 1, ..., n-p$ čine bazu prostora rešenja jednačine $\mathcal{M}\alpha = 0$.

Bez dokaza.

Primer matematičkog klatna

Zavisnost perioda oscilovanja matematičkog klatna od ostalih parametara?

Sa trećeg časa (nakon puno fizike i računa i diferencijalnih jednačina): $T = 4 \cdot \sqrt{\frac{l}{2g}} \int\limits_{0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}} d\theta$ ili $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, za $\theta_0 << 1$

Fizičke veličine:

- T - period oscilovanja klatna
- m - masa klatna (kuglice)
- l - dužina štapa
- $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$ - ubrzanje Zemljine teže
- θ_0 - početni ugao otklona

Dimenzije fizičkih veličina:

- $\delta(T) = T$
- $\delta(m) = M$
- $\delta(l) = L$
- $\delta(g) = L/T^2$
- $\delta(\theta_0) = 1$

Korak 1: formiramo dimenzionu matricu
$\delta(T) = T$, $\delta(m) = M$, $\delta(l) = L$, $\delta(g) = L/T^2$, $\delta(\theta_0) = 1$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} T & m & l & g & \theta_0 \end{array} \\ \mathcal{M} = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ T \\ M \\ L \end{array}$$

Korak 2: Odredimo $p = rang(\mathcal{M}) = 3$

Korak 3: Broj veličina (T, m, l, g, θ_0): $n = 5 \xRightarrow{\Pi \text{ teorema}}$
$n - p = 5 - 3 = 2$ bezdimenziona faktora Π_1 i Π_2

Korak 4: Rešavamo sistem linearnih jednačina $\mathcal{M}\alpha = 0$ u potrazi za 2 linearno nezavisna rešenja koja će činiti bazu tog prostora rešenja:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \cdot T + 0 \cdot m + 0 \cdot l = 2 \cdot g + 0 \cdot \theta_0 \\ 0 \cdot T + 1 \cdot m + 0 \cdot l = 0 \cdot g + 0 \cdot \theta_0 \\ 0 \cdot T + 0 \cdot m + 1 \cdot l = -1 \cdot g + 0 \cdot \theta_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \alpha_1 = (2, 0, -1, 1, 0) \\ \alpha_2 = (0, 0, 0, 0, 1) \end{array}$$

Korak 5: Formiramo bezdimenzione faktore tako što stepenujemo odgovarajuće veličine (T, m, l, g, θ_0) na odgovarajuće stepene iz rešenja $\alpha_1 = (2, 0, -1, 1, 0), \alpha_2 = (0, 0, 0, 0, 1)$:

$$\Pi_1 = T^2 \cdot m^0 \cdot l^{-1} \cdot g^1 \cdot \theta_0^0 = \frac{T^2 g}{l}, \quad \Pi_2 = T^0 \cdot m^0 \cdot l^0 \cdot g^0 \cdot \theta_0^1 = \theta_0$$

Korak 6: Π teorema $\Longrightarrow$

$$f(T, m, l, g, \theta_0) = 0 \Longleftrightarrow F(\Pi_1, \Pi_2) = F(\frac{T^2 g}{l}, \theta_0) = 0$$

Korak 7: Podsećanje (analiza): Teorema o implicitnoj funkciji

Neka je $A \subset \mathbb{R}^2$ otvoren skup, $(a,b) \in A$, $F : A \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, $F(a,b) = 0$, postoji $\frac{\partial F}{\partial y}$ i neprekidan je na A i $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Tada postoji okolina $W = U \times V$ tačke (a,b) gde je $U = \{x : |x-a| < \alpha\}$ i $V = \{y : |y-b| < \beta\}$ i jednoznačno određena neprekidna funkcija $\phi : U \to V$ takva da je $\phi(a) = b$ i $F(x,\phi(x)) = 0$ za $x \in U$.

$$F(\frac{T^2 g}{l}, \theta_0) = 0 \xRightarrow{\text{TOIF}} \frac{T^2 g}{l} = \phi(\theta_0)$$

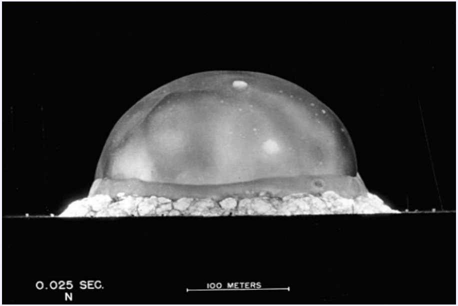
$$\Longrightarrow T = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \phi(\theta_0)$$

Dodatno: ϕ je parna funkcija po θ_0, razvojem u Tejlorov red:

$$\phi(\theta_0) = A + B\theta_0^2 + ... \Longrightarrow T = A\sqrt{\frac{l}{g}} + O(\theta_0^2)$$

Za $\theta_0 << 1$, $O(\theta_0^2) \to 0$, pa važi $T = A\sqrt{\frac{l}{g}}$.

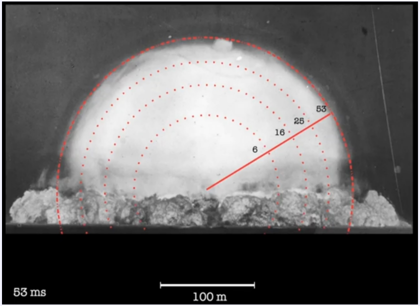
Primer probe nuklearne bombe



- 16. jula 1945. (New Mexico) - izvedena prva atomska proba Trinity

Kolika je energija te atomske bombe? Strogo čuvana tajna.

- G. I. Taylor - "Godine 1950, objavio je dva rada u kojima je procenjivao snagu eksplozije koristeći Bakingemsku Pi teoremu..." (Wikipedia)



Fizičke veličine:

- E - energija bombe
- R - poluprečnik vatrene lopte
- t - proteklo vreme
- ρ - gustina vazduha

Dimenzije fizičkih veličina:

- $\delta(E) = ML^2/T^2$
- $\delta(R) = L$
- $\delta(t) = T$
- $\delta(\rho) = M/L^3$

Korak 1: formiramo dimenzionu matricu
$\delta(E) = ML^2/T^2$, $\delta(R) = L$, $\delta(t) = T$, $\delta(\rho) = M/L^3$

$$\mathcal{M} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \color{red}{R} & \color{red}{t} & \color{red}{\rho} & \color{red}{E} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \color{red}{M} \\ \color{red}{L} \\ \color{red}{T} \end{array} \end{array}$$

Korak 2: Odredimo $p = rang(\mathcal{M}) = 3$

Korak 3: Broj veličina (R, t, ρ, E): $n = 4 \xRightarrow{\Pi \text{ teorema}} n - p = 4 - 3 = 1$ bezdimenzioni faktor Π_1.

Korak 4: Rešavamo sistem linearnih jednačina $\mathcal{M}\alpha = 0$ u potrazi za 1 rešenjem koje će činiti bazu tog prostora rešenja:

$$\alpha = (-5, 2, -1, 1)$$

Korak 5: Formiramo bezdimenzioni faktor tako što stepenujemo odgovarajuće veličine (R, t, ρ, E) na odgovarajuće stepene iz rešenja $\alpha = (-5, 2, -1, 1)$:

$$\Pi_1 = R^{-5} t^2 \rho^{-1} E$$

Korak 6: Π teorema $\Longrightarrow$

$$f(R, t, \rho, E) = 0 \Longleftrightarrow F(\Pi_1) = F(R^{-5} t^2 \rho^{-1} E) = 0$$

Korak 7:

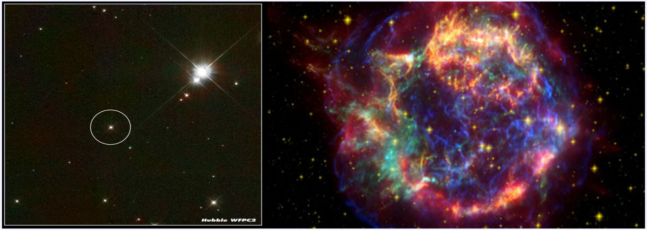
$$\begin{aligned} F(\Pi_1) = 0 &\Longrightarrow \Pi_1 \text{ je koren (nula) jednačine } F(\Pi_1) = 0 \\ &\Longrightarrow \Pi_1 = C, \ \ C = const \\ &\Longrightarrow R^{-5} t^2 \rho^{-1} E = C \\ &\Longrightarrow E = C \frac{R^5 \rho}{t^2} \end{aligned}$$

Dodatno: Eksperimentalnim putem sa poznatim eksplozivom (TNT) $\Longrightarrow C \approx 1 \Longrightarrow E \approx \frac{R^5 \rho}{t^2} \approx$ 19 kilotona TNT.

Date	Name	Yield (kt)	Country
July 16, 1945	*Trinity*	18–20	United States

Primer eksplozije supernove

Kolika energija se oslobodi pri eksploziji supernove?



- 1572. Tiho Brahe uočio "novu" zvezdu (Tycho's Supernova)- znamo t
- Poluprečnik R moguće utvrditi na osnovu daljine i ugla pod kojim se vidi (crveni pomak)
- Poznata gustina međuzvezdanog prostora ρ

Isti model $\Longrightarrow E \approx 2.4 - 4.8 \times 10^{28}$ megatona TNT (masa Zemlje $\times 10^{12}$ TNT, energija koje će Sunce osloboditi za 10^9 godina)

Primer kretanje lopte kroz fluid

Kolika je sila otpora sredine (voda, vazduh,...)?

Fizičke veličine:

- F - sila otpora
- R - poluprečnik lopte
- v - brzina kojom se kreće telo
- ρ - gustina fluida
- μ - dinamička viskoznost fluida

Dimenzije fizičkih veličina:

- $\delta(F) = ML/T^2$
- $\delta(R) = L$
- $\delta(v) = L/T$
- $\delta(\rho) = M/L^3$
- $\delta(\mu) = M/LT$

Korak 1: formiramo dimenzionu matricu

$$\mathcal{M} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} R & v & \rho & \mu & F \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ L \\ M \\ T \end{array}$$

Korak 2: Odredimo $p = rang(\mathcal{M}) = 3$

Korak 3: Broj veličina (R, v, ρ, μ, F): $n = 5 \xRightarrow{\Pi \text{ teorema}} n - p = 5 - 3 = 2$ bezdimenziona faktora Π_1 i Π_2

Korak 4: $\mathcal{M}\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = (1, 1, 1, -1, 0), \alpha_2 = (2, 2, 1, 0, -1)$

Korak 5: $\Pi_1 = \frac{Rv\rho}{\mu}, \quad \Pi_2 = \frac{R^2v^2\rho}{F}$

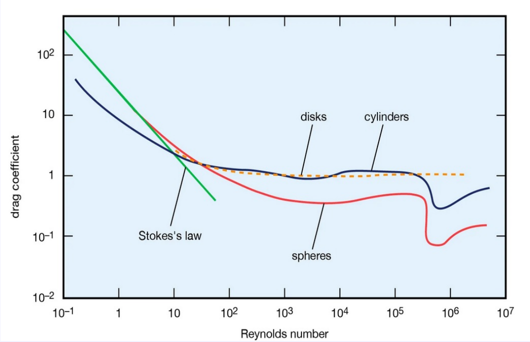
Korak 6: $f(R, v, \rho, \mu, F) = 0 \Longleftrightarrow f_1(\Pi_1, \Pi_2) = f_1(\frac{Rv\rho}{\mu}, \frac{R^2v^2\rho}{F}) = 0$

Korak 7: Na osnovu TOIF: $\frac{R^2v^2\rho}{F} = \phi(\frac{Rv\rho}{\mu}) \Longrightarrow F = R^2v^2\rho \cdot \phi_1(\frac{Rv\rho}{\mu})$

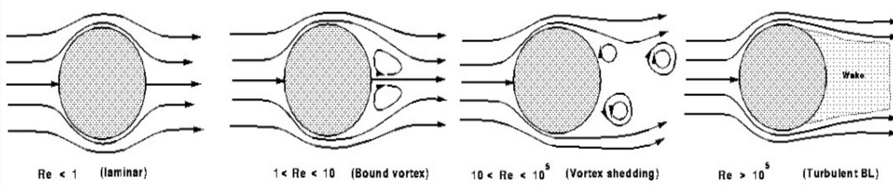
Dodatno:

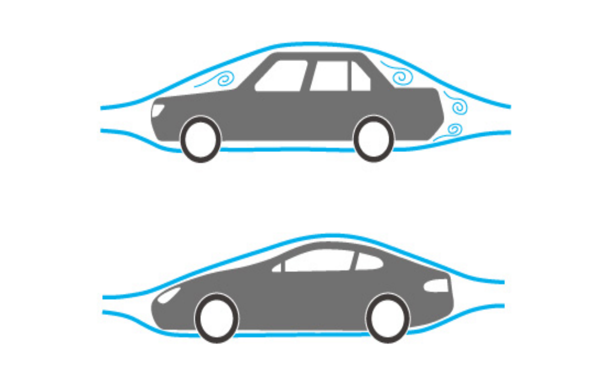
- Rejnoldsov broj $R_e = \frac{Rv\rho}{\mu} \Longrightarrow F = R^2v^2\rho \cdot \phi_1(R_e)$
- Koeficijent otpora tela (drag coefficient) $C_D(R_e) = \frac{2}{\pi}\phi_1(R_e) \Longrightarrow F = R^2v^2\rho\frac{\pi}{2}C_D(R_e)$
- Čeoni presek lopte $A = R^2\pi \Longrightarrow F = \frac{1}{2}C_D(R_e)Av^2\rho$
- $C_D(R_e) = ?$

$C_D(R_e) = ?$



- Za $R_e < 10 \rightarrow$ linearno $C_D = 24/R_e$
- Za $10^2 < R_e < 10^5 \rightarrow$ $C_D \approx$ konstanta
- Za $R_e > 10^5$ dodatni efekti (ne radimo)





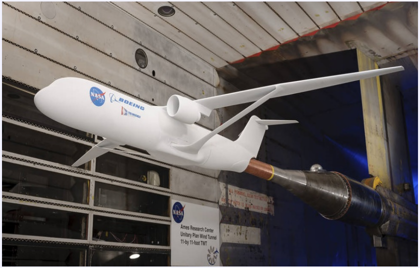
Skaliranje i umanjeni modeli (makete)

($\heartsuit$) $f(\Pi_1, \ldots, \Pi_k) = 0$, $\Pi_1, \ldots, \Pi_k$ bezdimenzioni faktori

$\Pi_i = Q_1^{\alpha_{1i}} \cdot \ldots \cdot Q_n^{\alpha_{ni}}$, Q_i fizičke veličine

Veliki objekat (pravi)

$\Pi_1^v, \ldots, \Pi_k^v$



Mali objekat (maketa)

$\Pi_1^m, \ldots, \Pi_k^m$

- $\Pi_j^v = \Pi_j^m$, $j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k \xRightarrow{(\heartsuit)} \Pi_i^v = \Pi_i^m$
- Ovo ne znači da se i fizičke veličine u faktorima Π_j^v i Π_j^m poklapaju! One mogu biti različite, samo je njihov umnožak uvek isti.

Primer kretanja lopte kroz fluid (makete)

$\Pi_1 = \frac{Rv\rho}{\mu}, \quad \Pi_2 = \frac{R^2 v^2 \rho}{F}$

Velika lopta

- Fizičke veličine:
  F_v, R_v, v_v, ρ_v, μ_v
- Bezdimenzioni faktori:
  $\Pi_1^v = \frac{R_v v_v \rho_v}{\mu_v}$
  $\Pi_2^v = \frac{R_v^2 v_v^2 \rho_v}{F_v}$

Mala lopta

- Fizičke veličine:
  F_m, R_m, v_m, ρ_m, μ_m
- Bezdimenzioni faktori:
  $\Pi_1^m = \frac{R_m v_m \rho_m}{\mu_m}$
  $\Pi_2^m = \frac{R_m^2 v_m^2 \rho_m}{F_m}$

Veze između fizičkih veličina:

$F_v = S_F \cdot F_m$, $R_v = S_R \cdot R_m$, $v_v = S_v \cdot v_m$, $\rho_v = S_\rho \cdot \rho_m$, $\mu_v = S_\mu \cdot \mu_m$
$S_F, S_R, S_v, S_\rho, S_\mu \in \mathbb{R}$ - skalirajući faktori

Veze između bezdimenzionih faktora:

$$\Pi_1^v = \frac{R_v v_v \rho_v}{\mu_v} = \frac{S_R \cdot R_m \cdot S_v \cdot v_m \cdot S_\rho \cdot \rho_v}{S_\rho \cdot \mu_v} = \frac{S_R \cdot S_v \cdot S_\rho}{S_\mu} \cdot \Pi_1^m \Longrightarrow \frac{S_R \cdot S_v \cdot S_\rho}{S_\mu} = 1$$

$$\Pi_2^v = \frac{R_v^2 v_v^2 \rho_v}{F_v} = \frac{(S_R \cdot R_v)^2 (S_v \cdot v_v)^2 \cdot S_\rho \cdot \rho_v}{S_F \cdot F_v} = \frac{S_R^2 \cdot S_v^2 \cdot S_\rho}{S_F} \cdot \Pi_2^m \Longrightarrow \frac{S_R^2 \cdot S_v^2 \cdot S_\rho}{S_F} = 1$$

Konkretan primer: $R_v = 25m, R_m = 0.5m$

- $S_R = 25/0.5 = 50$
- $S_\mu = S_\rho = 1$ (isti fluid)

$$\frac{S_R \cdot S_v \cdot S_\rho}{S_\mu} = \frac{50 \cdot S_v \cdot 1}{1} = 1 \Longrightarrow S_v = \frac{1}{50}$$

$$\Longrightarrow v_v = \frac{1}{50} \cdot v_m$$

$$\Longrightarrow v_m = 50 \cdot v_v$$

$$\frac{S_R^2 \cdot S_v^2 \cdot S_\rho}{S_F} = \frac{50^2 \cdot (\frac{1}{50})^2 \cdot 1}{S_F} = 1 \Longrightarrow S_F = 1$$

$$\Longrightarrow F_v = 1 \cdot F_m$$

Zaključak:

Ukoliko se kreće 50 puta većom brzinom, lopta poluprečnika 0.5m će imati istu silu otpora za kretanje kroz isti fluid kao i lopta poluprečnika 50m .

Praksa: da li može da se ostvari 50x veća brzina u vazdušnom tunelu?  

Model važi za bilo koji fluid $\Longrightarrow$ *Promenimo fluid (vazduh* $\rightarrow$ *voda)!*

Vazduh (velika lopta)

- $\rho_v = 1.225 kg/m^3$
- $\mu_v = 1.827 \cdot 10^{-5} kg/ms$

Voda (mala lopta)

- $\rho_m = 10^3 kg/m^3$
- $\mu_m = 8.90 \cdot 10^{-4} kg/ms$

Skalirajući faktori:

- $\rho_v = S_\rho \cdot \rho_m \Longrightarrow S_\rho = 1.225 \cdot 10^{-3}$
- $\mu_v = S_\mu \cdot \mu_m \Longrightarrow S_\mu = 2.05 \cdot 10^{-2}$
- $S_R = 50$

$$\frac{S_R \cdot S_v \cdot S_\rho}{S_\mu} = \frac{50 \cdot S_v \cdot 1.225 \cdot 10^{-3}}{2.05 \cdot 10^{-2}} = 1 \Longrightarrow S_v = 0.335$$

$$\Longrightarrow v_v = 0.335 \cdot v_m$$

$$\Longrightarrow v_m = 2.98 \cdot v_v$$

$$\frac{S_R^2 \cdot S_v^2 \cdot S_\rho}{S_F} = \frac{50^2 \cdot 2.98^2 \cdot 1.225 \cdot 10^{-3}}{S_F} = 1 \Longrightarrow S_F = 0.334$$

$$\Longrightarrow F_v = 0.334 \cdot F_m$$

Zaključak:

Ukoliko se kreće ~ 3 puta većom brzinom lopta poluprečnika 0.5m će imati približno 3 puta veću silu otpora za kretanje kroz vodu nego lopta poluprečnika 50m kroz vazduh .